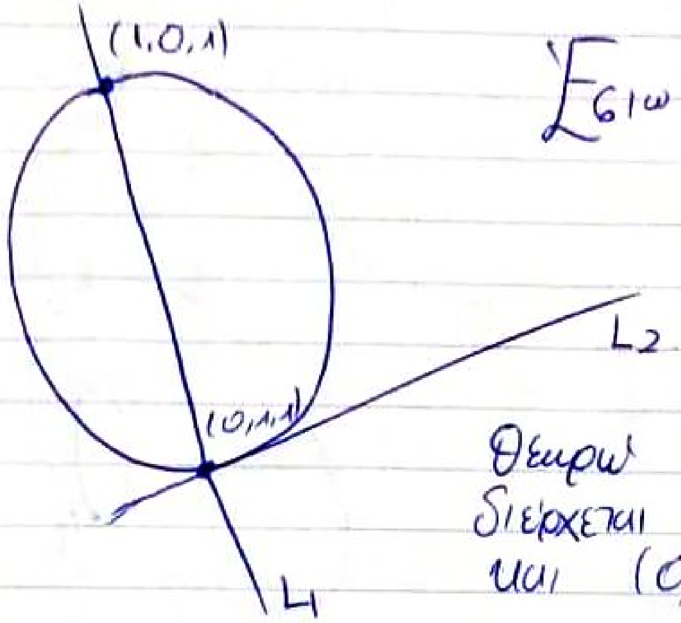
Μάθημα 10ο 20/05/19

Άσκηση (SOS^3)

Να βρεθεί μια ανάγωγη κωνική που τέμνει την κωνική $V(x^2+y^2-z^2)$ στα σημεία $(1,0,1)$ με πολ/τητα τομής 1 και $(0,1,1)$ με πολ/τητα τομής 3.



Έστω $Q = x^2+y^2-z^2$

Θεωρώ τη L_1 την ευθεία που διέρχεται από τα $(1,0,1)$ και $(0,1,1)$

$$L_1 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{z-x-y}$$

Βρίσκω την εξίσωση της εφαπτ.:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)X + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)Y + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)Z =$$

$$= 2y-2z=0$$

Άρα: $L_1 : z-x-y=0$

$L_2 : y-z=0$

$$\begin{cases} Q=0 \\ L_1L_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q=0 \\ L_1L_2+sQ=0 \end{cases}$$

Ψάχνω πλέον κατάλληλο s ώστε η L_1L_2+sQ $\forall t$ είναι ανάγωγη.

$$L_1L_2+sQ=(z-x-y)(y-z)+s(x^2+y^2-z^2)=F$$

Η F ανάγωγη $\underline{\underline{\text{αν-ν}}}$ $H_F \neq 0$

$$F=sx^2-xy+xz+sy^2-y^2+2yz-sz^2-z^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2sx-y+z$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-x+2sy-2y+2z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=x+2y-2sz-2z$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2s, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=-1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2s-2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}=1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=-2s-2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}=2.$$

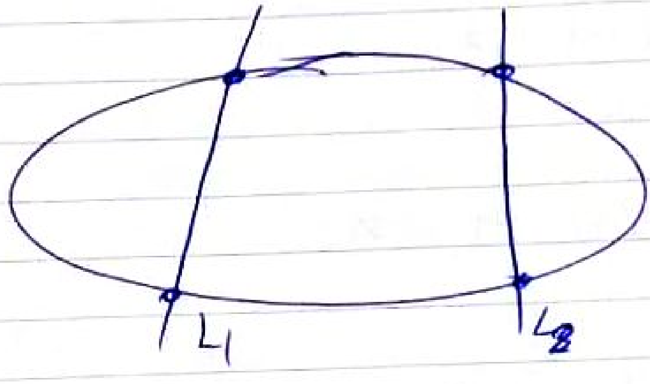
$$H_F = \begin{vmatrix} 2s & -1 & 1 \\ -1 & 2s-2 & 2 \\ 1 & 2 & -2s-2 \end{vmatrix} = \dots = -8s^3$$

Άρα για $\forall\, s \in \mathbb{R}^*$ έχω ανάγωγη

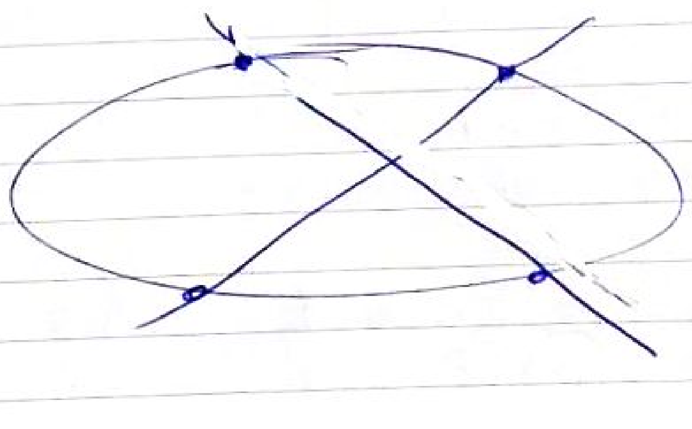
π.χ. για $s=1$:

$V\big((z-x-y)(y-z) + (x^2+y^2-z^2)\big)$

→ Αν διπλούς κωνική με 4 κοινά σημεία τομής)
(πολλ/τητα τομής 1)



ή



Θεώρημα Έστω 2 καμπύλες n-βαθμού οι οποίες τέμνονται σε n^2 διαφορετικά σημεία και ακριβώς $m \cdot n$ από αυτά βρίσκονται πάνω σε μία ανάγωγη καμπύλη βαθμού m. Τότε τα υπόλοιπα $n^2 - mn$ σημεία ανήκουν σε μια καμπύλη βαθμού $n-m$

Απόδειξη

Έστω $V(F_1), V(F_2)$ καμπύλες n-βαθμού όπου τέμνονται σε n^2 διαφ. σημεία, κι έστω $V(G)$ ανάγωγη m βαθμού που διέρχεται από $m \cdot n$ από αυτά.

Θεωρώ την καμπύλη $V(s_1F_1 + s_2F_2)$, n βαθμού με $(s_1, s_2) \neq (0,0)$

Για δοθέν σημείο A με κατάλληλη επιλογή σημείων (των s_1, s_2) $\Rightarrow A \in V(s_1F_1 + s_2F_2)$

$$\left(\begin{array}{l} \text{αρκεί να } s_1 = F_2(A) \\ \text{και } s_2 = F_1(A) \end{array} \right)$$

Άρα επιλέγοντας $A \in V(G)$ (διαφ. από τα $m \cdot n$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ για τα κατάλληλα $s_1, s_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A \in V(s_1F_1 + s_2F_2) \Rightarrow$ οι $V(G), V(s_1F_1 + s_2F_2)$ έχουν τουλ. $m \cdot n + 1 > m \cdot n$ κοινά σημεία. $\Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{Bezout}]{\text{λόγω}}$ έχουν κοινή συνιστώσα, και καθώς G ανάγωγη, η συνιστώσα είναι η G. $\Rightarrow$

$\Rightarrow V(s_1F_1 + s_2F_2) = V(G) \cup V(H)$

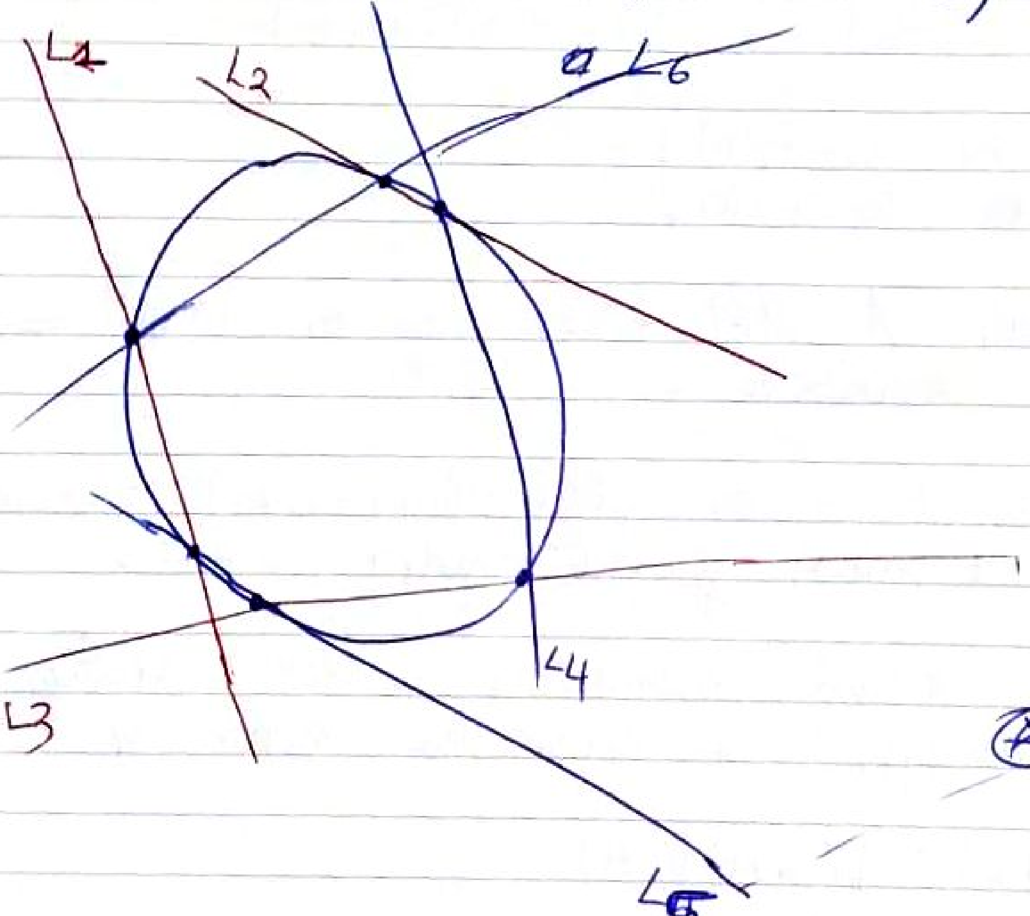
$\downarrow$ διέρχεται από n^2 διαφ. σημ. $\qquad \downarrow$ $m \cdot n$ από αυτά

$1 \Rightarrow$ η $V(H)$ περιέχει και τα υπόλοιπα $n^2 - mn$ σημεία και καθώς $V(S_1F_1 + S_2F_2) \to$ βαθμού n, $V(G) \to$ βαθμού m $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ βαθμός $V(H) = n - m$

"Θεώρημα Pascal"

Τα ζευγάρια των ευθειών που ορίζονται από τις απέναντι πλευρές ενός εξαγώνου εγγεγραμμένου σε μια ανάγωγη κωνική $V(Q)$ συναντιούνται σε συνευθειακά σημεία.



Ⓐ

Απόδειξη Θεωρώ τις κυβικές $V(L_1L_2L_3)$ και $V(L_4L_5L_6)$ τέμνονται σε ακριβώς $3^2=9$ σημεία και αν $V(Q)$ τέμνει την $V(sL_1L_2L_3+s'L_4L_5L_6)$

$\downarrow$

ΚΥΚΛΟΣ σε ακριβώς $\underset{m}{2}\cdot\underset{n}{3}=6$ από αυτά.

$\Rightarrow$ από προηγούμενο Θεώρημα τα υπόλοιπα $n^2-mn=9-6=3$ ανήκουν σε μια καμπύλη βαθμού $n-m=3-2=1$ (ΕΥΘΕΙΑ)

Θεώρημα Των 9 σημείων

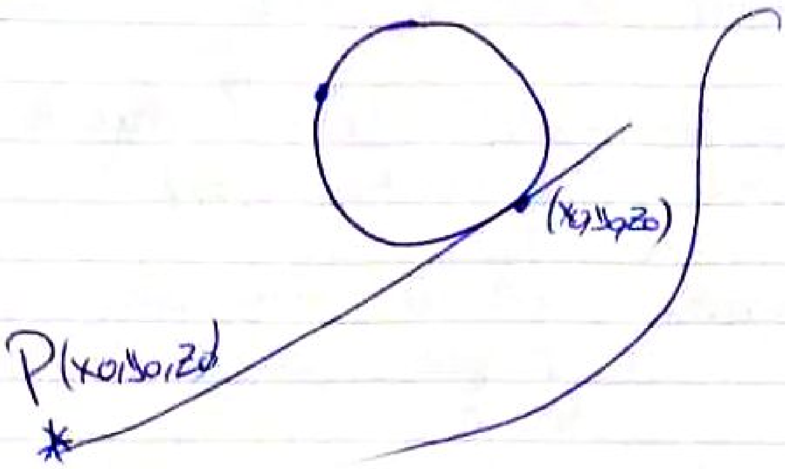
Αν 2 κυβικές καμπύλες τέμνονται σε ακριβώς 9 σημεία τότε κάθε κυβική καμπύλη η οποία διέρχεται από τα 8 από αυτά ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ διέρχεται και από το ένατο

(*) Εφαπτόμενες από Σημείο Προς Καμπύλη

Έστω $P(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ και $V(F)$ καμπύλη βαθμού d.

ΕΥΡΕΣΗ ΠΛΗΘΟΥΣ / ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤ. ΠΟΥ ΦΕΡΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ P ΣΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ.

1



Θα ψάξω να λύσω το (Σ)

$$F(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1,z_1)X_0+\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1,z_1)Y_0+\frac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)Z_0$$

<u>Άσκηση</u>

Θεωρώ την κυβική $V(zy^2-x^3+xz^2)$ και έστω $P(0,1,0)$ σημείο καμπής της.
Να βρεθούν οι εφαπτ. που διέρχονται από το P προς τη V.

Λυση

Οι εφαπτ. στο $P(0,1,0)$ είναι:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,0)X + \frac{\partial F}{\partial y}(0,1,0)Y + \frac{\partial F}{\partial z}(0,1,0)Z = 0, \alpha$$

$$\Leftrightarrow 0X + 0Y + 1\cdot Z = 0 \Rightarrow \boxed{Z=0}$$

Άρα:

$$\begin{cases} zy^2 - x^3 + xz^2 = 0 \\ (-3x^2+z^2)0 + 2yz\cdot 1 + (y^2+2xz)\cdot 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} zy^2 - x^3 + xz^2 = 0 \\ 2yz = 0 \end{cases}$$

Για $z=0 \Rightarrow x=0$ (3πλή πολλ/τητα) $\Rightarrow (0,1,0)$

$y=0 \Rightarrow x(z^2-x^2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=0 \wedge z^2-x^2=0$

Για $x=0$: $\Rightarrow (0,0,1)$

ή $(z-x)(z+x)=0 \Leftrightarrow x=\pm z$ $\begin{cases}(1,0,1)\\(1,0,-1)\end{cases}$

Τις ζητούμενες εξισώσεις θα τις πάρουμε υπολογίζοντας τις προβολικές ευθείες

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - z = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x + z = 0$$